ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

jeudi 24 avril 1997, de 8 h à 12 h

Une éprouvette contient 10 bactéries, 4 sont des bactéries de type A, 6 de type B. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, la proportion de bactéries de chaque type restant inchangée. On prélève alors, au hasard, 10 bactéries que l'on met dans une autre éprouvette. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires dans les mêmes conditions que précédemment, et on recommence l'expérience.
Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences?

L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définitions. Soit une variable aléatoire X; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,..,N\}$. On pose $p = \frac{k_0}{N}$ et $q = 1-p$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω,A,P), à valeurs dans $\{0,..,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante:

X_0 est la variable certaine égale à k_0.
X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et p. (Par convention, on dit que la loi binomiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable certaine égale à 0 et que la loi binomiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable certaine égale à N).
Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binomiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes:

pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$ et pour tout entier i de $\{0,..,N\}$,

$$P(X_{n+1} = i / X_n = k) = C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$$ (avec la convention habituelle que $0^0 = 1$).

On a de plus l'hypothèse (H): pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,..,k_n)$ de $\{0,..,N\}^n$ tel que $P(X_n = k_n,..,X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1} = i / X_n = k_n,...,X_1 = k_1) = P(X_{n+1} = i / X_n = k_n)$.
Cette hypothèse n'est utile que pour la question 6. de la partie 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n\geq 0}$ par $F_n = \frac{X_n}{N}$.

PRELIMINAIRE

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N le nombre de bactéries prélevées à chaque expérience, k_0 le nombre de bactéries de type A dans la première éprouvette au début de la première expérience et n le numéro de l'expérience, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binomiale. Comment interpréter l'hypothèse (H)?

PARTIE 1

Dans cette partie, $N = 3$.

1) Que dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$.

2) Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Soit le vecteur ligne $V = (0,1,2,3)$. Calculer VA.
b) Montrer que $E(X_n) = VU_n$, pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$.

4) a) On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AY_2 et AY_3 en fonction de Y_2 et Y_3.

b) Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
c) Calculer A^n pour tout entier n.

5) a) Montrer que la loi de X_n est donnée par:

$$P(X_n=0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n,\quad P(X_n=1) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

$$P(X_n=2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right),\quad P(X_n=3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

6) Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq 1)$.

On pose $x_1 = P(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $x_k = P(X_1 = 1,\ldots,X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul, $y_k = P(X_1 = 1,\ldots,X_k = 1)$.

a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k . En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

b) Montrer que $P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$. En déduire $P(B_n)$ et la limite de la suite $(P(B_n))_{n\geq 1}$.

c) En déduire la probabilité qu'il existe n vérifiant $F_n > 0{,}5$.

PARTIE 2

Dans cette partie, N est un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{1,..,N-1\}$.

On pose pour tout entier n, $u_n = P(X_n=0) + P(X_n = N)$ et $v_n = 1 - u_n$.

A. Loi de X_n

1) Montrer que pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\,C_N^i\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$.

2) Montrer que pour tout entier n, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$.

3) a) Montrer que pour tout entier n, $E\left[X_{n+1}(N-X_{n+1})\right]=\frac{N-1}{N}E\left[X_n(N-X_n)\right]$.

b) En déduire la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$ en fonction de n, N et k_0.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et convergente.

5) a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans IR_+, prenant un nombre fini de valeurs.

Montrer que pour tout réel a strictement positif, $P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$.

b) Etudier sur [1,N-1] la fonction f définie par: $\forall x\in[1,N-1], f(x)=x(N-x)$.

c) En utilisant la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$, montrer que pour tout entier n, $0\leq v_n\leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

6) a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

b) En déduire que pour tout entier k de {1,..,N-1}, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k)=0$.

c) En utilisant le résultat du 2), montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=N)=p$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=0)$.

d) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

B. Temps d'arrêt

On définit la variable aléatoire T par:
si pour tout entier n, $(X_n\neq 0)$ et $(X_n\neq N)$, alors $T=0$
sinon, $T=n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k=0)$ ou $(X_k=N)$.

1) Que vaut $P(T=0)$? Montrer que pour tout entier n non nul, $P(T=n) = v_{n-1} - v_n$.

2) a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} kP(T=k)=\sum_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n$.

b) En déduire que T admet une espérance et que $E(T)\leq pq\frac{N^3}{N-1}$ (on ne cherchera pas à calculer $E(T)$).

C. Retour aux bactéries

Dans l'exemple des bactéries, on a posé la question : « Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences ? ». Pouvez-vous maintenant y répondre ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail